Aktivnost 15

Gazi med igluji – Steinerjeva drevesa

Kaj je težje? Sestaviti dobro cestno omrežje tako, da izbiramo med obstoječimi cestami (kot je bilo treba storiti v Blatnem dolu) ali začeti od začetka in določiti nove ceste med kraji? Videli bomo, da je drugo veliko veliko težje.

Povzetek

Včasih že drobna sprememba iz preprostega problema naredi problem, ki ga ne znamo učinkovito reševati. Naloga v tej aktivnosti je zelo podobna Blatnemu mestu, razlika je le, da dovolimo dodajanje novih križišč. Medtem ko smo Blatno mesto asfaltirali s preprostim algoritmom, dobrega splošnega algoritma za ta problem ni.

Namen

Otroci spoznajo še en primer težkega problema.

Vidijo, da lahko majhna sprememba problema drastično spremeni njegovo težavnost.

Otroci se vadijo v geometriji, če so starejši, pa lahko tudi v računanju razdalj.

Potrebščine

Za izvedbo na prostem vsak otrok ali skupina (3-5 otrok) potrebuje

- šest klinov za šotore,
- nekaj metrov vrvice (lahko tudi volne),
- čim daljši meter,
- papir in pisalo za zapiske.

Če izvajaš aktivnost v učilnici, kline za šotore zamenjaš z bucikami, meter je lahko iz papirja ali pa otroci uporabijo kar ravnilo, potreboval pa boš nekaj, v kar bodo otroci lahko zabadali bucike. Plošče naj bodo po možnosti takšne, da lahko otroci zabodejo buciko oz. žebljiček kamorkoli in ne le na določena mesta, npr. vnaprej pripravljene luknjice. Primerni so, na primer, pluta, mehak les ali stiropor.

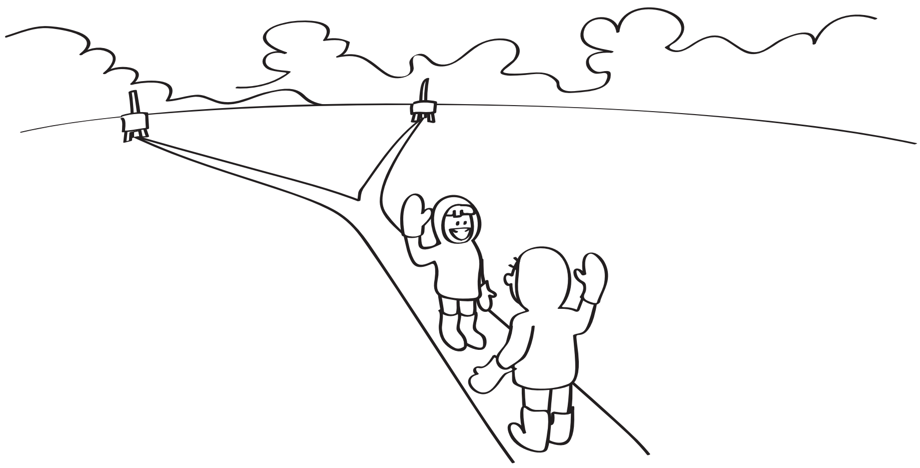
Gazi med igluji

V prejšnji aktivnosti smo razmišljali o toplem obmorskem mestu, ta pa se dogaja na zasneženem travniku. Otroci so si naredili igluje, ponoči pa je zapadlo veliko novega snega in zjutraj je čas za nove gazi med igluji. Za izziv poskušajo sestaviti poti tako, da bo

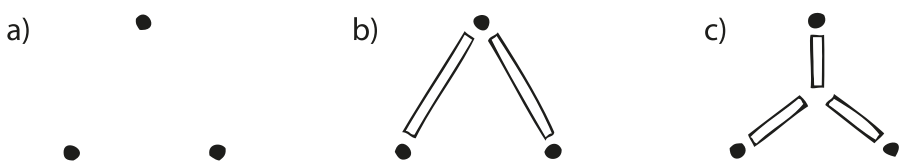
- mogoče priti do vsakega igluja, vendar
- bo skupna dolžina vseh poti čim krajša.

Naloga spominja na Blatno mesto, vendar je precej drugačna. V Blatnem mestu so bile poti že vnaprej podane, potrebno je bilo le izbrati tiste, ki jih bomo asfaltirali. Podobno je bilo z zemljevidom Slovenije: vse ceste so direktno povezovale pare mest, novih križišč nismo smeli dodajati – čeprav bi se nekam med Celje, Ravne na Koroškem, Maribor in Ptuj nemara dodati kakšnega, saj bi skrajšalo skupno dolžino poti.

Ta naloga je drugačna, saj dopušča dodajanje novih križišč. Vse poti bodo očitno ravne (igluji stojijo na travniku, torej bi z ovinki le brez potrebe podaljševali poti), umetnost pa je v postavljanju novih razpotij.

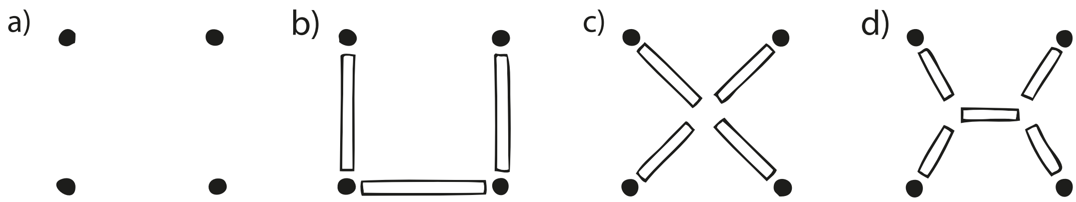


1. Otrokom razloži zgodbo. Poudari razliko med to nalogo in Blatnim dolom. Na sliki s tremi igluji jim pokaži, kako je mogoče s križiščem skrajšati pot.



2. Razdeli otroke v skupine po tri ali štiri. V zemljo (npr. na travniku) zabij kline v obliki kvadratov s stranico en meter (glej spodaj, slika a). Vsak klin predstavlja iglu. Otroci naj najprej preverijo, koliko vrvi potrebujejo brez dodatnih točk (3 metre, spodnja slika b).
3. Nato preverijo, kje postaviti dodatno križišče, s katerim bi skrajšali skupno dolžino poti. (Najboljše je, da ga dajo v središče kvadrata, kot kaže slika c; skupna dolžina vrvi bo 2.83 metra.)

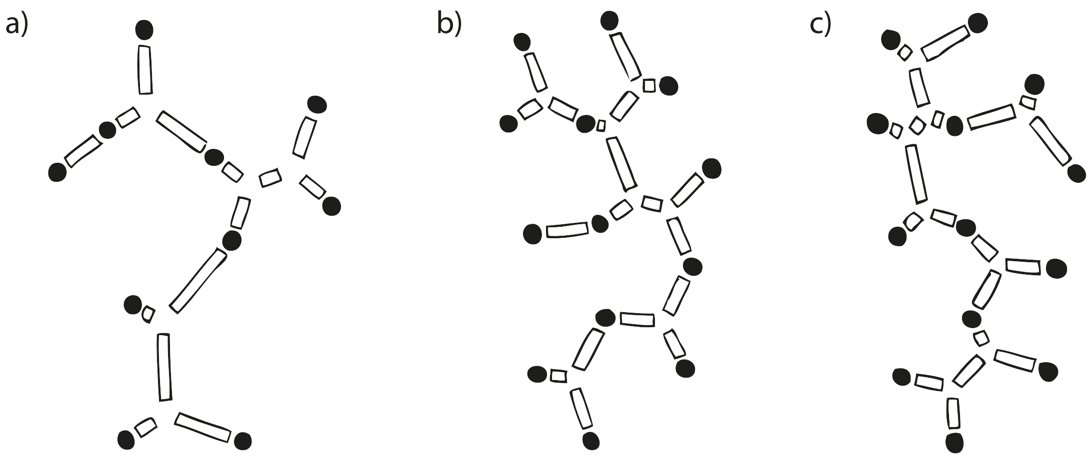
4. Predlagaj otrokom, da poskusijo z dvema dodatnima križiščema. (Če jih postavijo, kot kaže slika d, bodo potrebovali 2.73 metra vrvi.)
5. Bi šlo s tremi križišči še boljše? (Ne.)
6. Pogovori se z otroki, zakaj je problem težak. (Ker je veliko možnosti, kam postaviti dodatna križišča.)



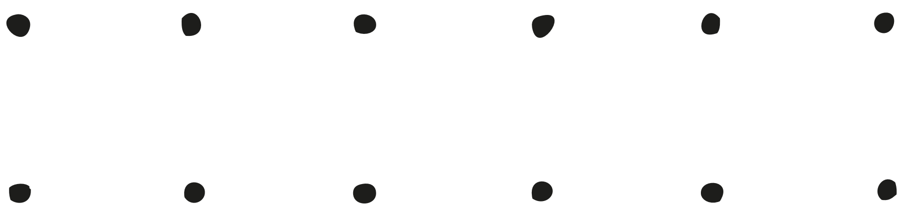
Dodatne možnosti

Otroci naj poskusijo tudi pravokotnik velikosti 1 × 2 metra. Izkaže se, da z eno dodatno točko poti le podaljšamo (namesto štirih metrov imamo 4,47 metra), dve pa pomagata (3.73 metra). Znajo otroci razložiti, zakaj dodatna točka samo škodi? (Ko raztegnemo kvadrat v pravokotnik, se brez dodatne točke razteguje le ena stranica, z dodatno točko pa vse štiri diagonale.)

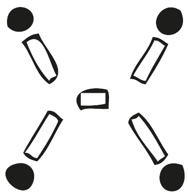
Starejši otroci se lahko igrajo tudi z večjim problemom. Dva sta objavljena na naslednjih straneh. Najboljše, da jih rešujejo na papirju in merijo razdalje z ravnilom. Rešitev prve kaže slika a, dve rešitvi druge, ki imata podobno dolžino poti, pa sliki b in c.

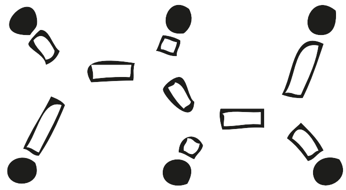


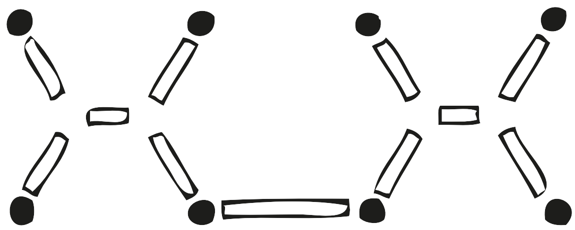
Razpostavitve v kvadrat lahko posplošimo v "lestve"; slika kaže lestev s šestimi prečkami, torej dvanajstimi igluji.

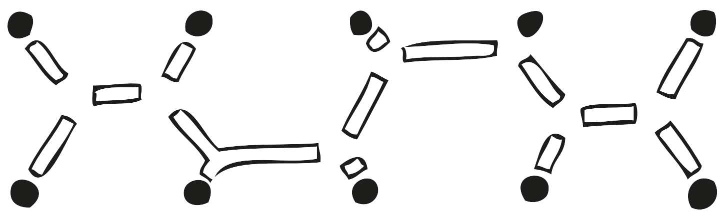


Kako povezati lestve? Rešitev za tri prečke (šest iglujev) je precej drugačna od tiste za dve vrsti (štirje igluji, kvadrat). Rešitev za štiri prečke je sestavljena kar iz dveh rešitev za dve, rešitev za šest prečk pa je kombinacija vsega doslej. Dokazati, da so to res najboljše rešitve, je kar zapletena reč.







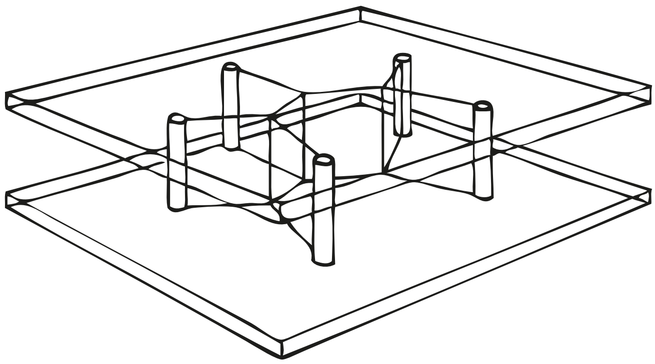


Pogovor

Problem je podoben Blatnemu mestu. Dodatna križišča si razložimo, kot da smo postavili dodatne igluje. Potem se delamo, da imamo med vsemi igluji (se pravi, med vsakim parom iglujev!) blatne ceste. Katere asfaltirati, pa se že znamo odločiti – najprej najkrajšo in potem tako naprej.

Čeprav je videti, kot da lahko problem gazi med igluji prevedemo na problem asfaltiranja cest, ki ga znamo dobro reševati, pa ne smemo spregledati detajla: kam postaviti dodatne točke? To je tisto, zaradi česar je ta problem težak.

Zanimiv je tale poskus: vzamemo dva kosa prozorne plastike, v kateri zvrtamo luknje in mednju zapičimo žeblje, razpostavljene tako, kot so postavljeni igluji. Reč potopimo v milnico in ko jo izvlečemo, se stene postavijo v obliko najkrajših poti. Vendar tudi milnica ne najde vedno najboljše rešitve: kar dobimo, je lokalni minimum, torej postavitev, v kateri bi vsaka drobna sprememba povečala dolžino poti. Utegne pa se zgoditi, da obstaja kakšna druga, povsem drugačna rešitev; če obstaja več lokalno dobrih rešitev, bomo v različnih poskusih z milnico dobivali različne rešitve.



Za učitelje: za kaj gre?

Strukturi, s katero se ukvarja ta naloga, pravimo Steinerjeva drevesa. "Drevesa" pravimo grafom brez ciklov (krožnih povezav), Steinerjeva pa so zaradi Jakoba Steinerja (1796 – 1863), ki se je prvi ukvarjal s krajšanjem poti s pomočjo dodatnih točk. Dodatnim točkam (križišča si lahko predstavljamo kar, kot da smo naredili dodatne igluje) pravimo Steinerjeve.

Zanimivo je, da problem ni težak, ker ne bi mogli ugotoviti, *točno* kam je potrebno postaviti dodatne točke, temveč *približno* kam jih moramo dati. Čim imamo *približen* položaj, lahko z lokalno optimizacijo določimo *točnega*. Tako kot milnica so tudi računalniki zelo dobri v piljenju končne rešitve.

Steinerjeva drevesa so še eden izmed mnogih NP-polnih problemov. Če bi znali dobro postavljati Steinerjeve točke, bi znali tudi dobro barvati grafe in razpostavljati sladoledarje.